# О ЛИЧНОСТНЫХ СМЫСЛАХ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Москалёв Николай Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет
moskalevnikolai@mail.ru

*Аннотация:* рассматривается использование личностных смыслов в преподавании различных курсов высшей математики. Наделение математического содержания тем или иным личностным смыслом позволяет сделать процесс преподавания более успешным по поставленным целям. Под личностным смыслом понимается субъективно воспринимаемая значимость для индивида тех или иных предметов, понятий, формулировок. В математических текстах и математическом изложении (лекции, практическом занятии) наделение математического содержания личностным смыслом возможно в виде различного вида аналогий, образов, метафор, нарративов, артефактов. Более полное и всестороннее раскрытие рассматриваемой темы, уяснение вновь вводимых понятий, установление внутренних и внешних взаимосвязей – вот только некоторые из задач, ради решения которых привлекаются конструкты, несущие личностные смыслы в изложение. Автором введено понятие математического артефакта. В процессе преподавания высшей математики на протяжении длительного времени автор вычленил из курса математики (прежде всего математического анализа) ряд математических понятий, определений, теорем, которые по своему значению далеко выходят за рамки конкретного математического текста и, будучи продолженными за границу собственно математического знания, становятся некими математическими феноменами. Проведена классификация основных конструктов (метафор, педагогических нарративов, математических артефактов) посредством которых и вносятся личностные смыслы в математические тексты и математические изложения (лекции, практические занятия, выступления).
*Ключевые слова:* личностные смыслы, метафоры, нарративы, математические артефакты.

# PERSONAL MEANINGS IN MATHEMATICS TEACHING

Moskalev Nikolai Alekseevich, PhD, Associate Professor
Kazan Federal University
moskalevnikolai@mail.ru

*Abstract:* we consider the use of personal meanings in the teaching of various courses of higher mathematics. Giving the mathematical content in some personal meaning to make the process of teaching more successful. Under the personal meaning it is understood subjectively perceived importance for the individual of certain objects, concepts, language. In mathematical texts and mathematical presentation (lectures, practical classes) endowing the mathematical content of personal meaning possibly in the form of various types of analogies, images, metaphors, narratives, artifacts. A more complete and thorough disclosure of the topic, clarification of the newly introduced concepts, the establishment of internal and external relationships - these are just some of the tasks for which solutions are involved constructs bearing personal meanings in the presentation. The author introduced the concept of a mathematical artifact. In the process of teaching of higher mathematics for a long time the author isolate from mathematics course (especially calculus), a number of mathematical concepts, definitions, theorems, which in its significance far beyond the specific mathematical text, and being continued beyond the boundaries of their own mathematical knowledge, are by some mathematical phenomena. The classification of the main constructs (metaphors, narratives pedagogical, mathematical artifacts) through which and made personal meanings in mathematical texts and mathematical presentation (lectures, workshops, performances).
*Keywords*: personal meanings, metaphors, narratives, mathematical artifacts.

Существуют два подхода к преподаванию математики: один – излагать предмет необходимо предельно строго, не допуская никаких отвлечений; другой – в процессе изложения материала возможны “вкрапления”, вносящие некоторые личностные смыслы в определения, теоремы, алгоритмы. Очевидно, в чистом виде первый подход трудно реализуем, поскольку сама личность преподавателя уже вносит личностный смысл в преподавание, а симпатия или антипатия со стороны аудитории может сделать процесс преподавания либо более успешным, либо, наоборот, провальным по поставленным целям. К понятию личностного смысла в отечественной психологии и педагогике одним из первых обратился Л.С. Выготский, проблемы личностного смысла в теории деятельности были разработаны А.Н. Леонтьевым. Будем понимать под личностным смыслом  субъективно воспринимаемую значимость  для индивида тех или иных предметов, понятий, формулировок. В математических текстах и математическом изложении (лекции, практическом занятии) наделение математической “ткани” личностным смыслом возможно в виде различного вида аналогий, образов, метафор[6], нарративов[7], артефактов[5]. Широко распространенным мнением о преподавании математики, выраженное таким крупным специалистом – математиком, как Л.Д. Кудрявцевым, является следующее: “Методика преподавания математики не наука, а *искусство*”[2]. В таком контексте сочетание предмета математики и этих понятий, привносящих личностный смысл в изложение, уже не кажется надуманным.

Дадим определения основных конструктов, посредством которых и вносятся личностные смыслы в математические тексты и математические изложения (лекции, практические занятия, выступления):

а) **педагогический нарратив** – всякое вербализированное построение в структуре лекции, напрямую не связанное с содержанием лекции;

б) **метафора** –  короткое, емкое сопоставление, которое в очень сжатой форме выражает суть понятия, определения или теоремы;

в) **математические артефакты** – математические понятия, определения, теоремы, ставшие некими математическими феноменами.

В последнее время предметом всё большего числа исследований становятся  вопросы преподавания математики для специальностей гуманитарного профиля[9]. Уже давно стало очевидным,  что нельзя излагать курс математики для гуманитарных специальностей также как для технических или тем более для физико-математических. Это вызвано и тем, что цели преподавания математики для этих двух направлений различны: для инженерного и физико-математического профилей математика является либо инструментом в их профессиональной деятельности, либо специальностью, для гуманитариев же изучение математики носит мировоззренческий характер (это не относится к тем направлениям гуманитарного толка, в которые математика проникает в качестве инструментария исследователя). Да и сам стиль гуманитарного мышления отличается, иногда диаметрально противоположно, от мышления представителей так называемого «точного знания». Здесь, кстати, зачастую и кроется феномен «нелюбви» к математике как к предмету, начиная со школьной поры. Не излагать же вообще математику для гуманитариев также нельзя, поскольку математика является значительной и очень важной составной частью человеческой культуры.

Полученная дилемма: не давать математику нельзя, а преподавать же как слепок с традиционного, логически последовательного курса, значит плодить непонимание и отторжение со стороны обучающихся – и подвигла автора сначала к размышлениям, а затем и осознанию необходимости создания такого курса математики, который бы давая, пусть даже фрагментарно (давать исчерпывающе полно математику гуманитариям вряд ли нужно) представления о ключевых достижениях и аспектах математики, вызывал бы и значительный интерес у представителей гуманитарного знания именно постановкой и представленными фактами математики. Другой отправной точкой размышлений автора в этом направлении явилось то, что в процессе преподавания высшей математики на протяжении длительного времени,  автор вычленил из курса математики (прежде всего математического анализа) ряд понятий, определений, теорем, которые по своему значению далеко выходят за рамки конкретного математического текста и, будучи,  прибегая к математическому понятию, «аналитически продолженными» за границу собственно математического знания, становятся некими математическими феноменами. Такие математические объекты и высказывания автор назвал **математическими артефактами**. Являясь по определению доминантами изложения, **математические артефакты**  являются теми мостками, которые будучи перекинутыми через пропасти математического неведения гуманитария, позволяют ему проникнуть на небольшие островки математического знания, с которых он может при желании осуществить и более глубокую экспансию вглубь «математического континента».

Математические артефакты в силу своей специфики не очень хорошо поддаются классификации. Однако условно их можно разбить на следующие группы:

**А.** Понятия, определения, формулы, вобравшие в себя, концентрирующие в себе фундаментальные, определяющие дефиниции математики. Ярчайшим образцом этого типа является определение интеграла Римана как предела интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

.

Как указывает Ф.А. Медведев [4] «… в этом определении, как в капле, отражается море почти всей истории математики, усилия необозримого числа её создателей». В этой формуле и функция, и сумма (суммирование), и предел, и интеграл. Каждый, кто знаком с курсом высшей математики, скажет, какой шлейф тянется за каждым из этих понятий, сколь они важны, фундаментальны и определяющи для математики. Да и заключённая в формуле символика имеет длительную и интересную историю.

**B.** Математические артефакты этого типа близки к типу А и отличаются от него меньшим охватом (историческим в том числе) и большей простотой и парадоксальностью. Примером этого типа является известная формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

и ещё в большей степени её частное значение

$$e^{i\pi} = -1.$$

Простота формулы удивительна, а сочетание символов, каждый из которых буквально пронизывает всю математику, даёт вдруг неожиданный результат – 1! В этой формуле для пытливого гуманитарного ума такое раздолье обобщений и умозаключений, что даже изощрённый математический ум в этом соревновании может отступить.

**C.** Математические артефакты достаточно простые по своему построению и объяснению даже не специалисту – математику, однако в результате такого построения получаются объекты парадоксальные и поражающие воображение. Пример – канторово совершенное множество. Это множество строится путём последовательного удаления сначала из отрезка [0;1] длиною 1 срединного интервала длиною 1/3, затем из оставшихся двух отрезков [0;1/3] и [2/3;1] срединных интервалов и т.д. до бесконечности. Построенное таким образом канторово множество столь удивительно по своим свойствам, что выдающийся математик Павел Сергеевич Александров, познакомившись с этим множеством на первом курсе Московского университета, воспринял его «как одно из величайших чудес, именно чудес, а не чего-либо иного, открытых человеческим духом»[10]. Кстати говоря, в такого рода оценках тех или иных математических артефактов, особенно от учёных столь авторитетных, как академик П.С. Александров, кроется для гуманитарных слушателей ещё один важный аспект – математический объект наделяется эмоциональной составляющей, придающей артефакту уже гуманитарное качество. В подтверждение сказанного можно привести ещё один пример – фразу Г. Лейбница о мнимых величинах: «Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытиём» [3]. Образности данного высказывания в восприятии гуманитария придаёт ещё большую значимость имя автора – Г. Лейбница, не только знаменитого математика, но и выдающегося гуманитария – философа, теолога, языковеда.

**D.** Математические артефакты этого типа являются примером нарушения устоявшихся положений математики, проникших на уровне обыденности в окружающую жизнь. Высказывание «от перемены мест слагаемых сумма не меняется» известно всем и глубоко укоренилось даже в народном фольклоре. Однако при рассмотрении теории условно сходящихся числовых рядов получаем теорему Римана: Каково бы не было число А, можно так переставить члены (слагаемые) всякого условно сходящегося ряда, что сумма вновь полученного ряда будет равна этому числу А. Объяснив популярно не только гуманитарию, но и любому обывателю суть данной теоремы, получим, что она является квинтэссенцией волюнтаризма!

Помимо указанных конструктов, служащих в качестве основных при наделении математического текста личностными смыслами, используются также образы и аналогии. Одним из ярких образцов применения аналогии в математическом тексте является объяснение метода Монте – Карло в известном учебнике по эконометрике Кристофера Доугерти [1]. Приведем это объяснение полностью: “По-видимому, никто точно не знает, почему *эксперимент по методу Монте-Карло* называется именно так. Возможно, это название имеет какое-то отношение к известному казино как символу действия законов случайности.

Основное понятие будет объяснено посредством аналогии. Предположим, что свинья обучена находить трюфели. Это дикорастущие земляные грибы, встречающиеся во Франции и Италии и считающиеся деликатесом. Они дороги, так как их трудно найти, и хорошая свинья, обученная поиску трюфелей, стоит дорого. Проблема состоит в том, чтобы узнать, насколько хорошо свинья ищет трюфели. Она может находить их время от времени, но возможно также, что большое количество трюфелей она пропускает. В случае действительной заинтересованности вы могли бы выбрать участок земли, закопать трюфели в нескольких местах, отпустить свинью и посмотреть, сколько грибов она обнаружит. Посредством такого контролируемого эксперимента можно было бы непосредственно оценить степень успешности поиска.

Эксперимент по методу Монте – Карло – это искусственный контролируемый эксперимент, дающий возможность такой проверки.”

Эффективность применения такой аналогии, несущий мощный заряд личностного смысла, очевидна. Во-первых, такое объяснение непростого математического метода делает его понятным даже для человека мало знакомого с математикой. Во-вторых, такое отвлечение от сухих математических формул и процедур, вызывает, согласно Л.С. Выготскому, “психическую волну”, некий эмоциональный пик, на котором рассмотрение математических дефиниций становится наиболее комфортным.

В качестве второго примера привнесения личностного смысла в математическое изложение, но теперь уже в лаконичной форме, приведём название ключевого элемента в методе вращений Якоби решения симметричной полной проблемы собственных значений. Такой ключевой элемент, в иной терминологии [8], называется также *обреченным* элементом. Здесь также второе, более яркое, метафорическое, говорящее название уже во многом несёт объясняющую данное понятие функцию.

Наделение математического текста или математического изложения во время лекции или практического занятия по математическим курсам теми или иными образами, аналогиями, метафорами, нарративами и артефактами требует четкой выверенности, чувства меры. Избыточность применения их в строгом математическом тексте или лекции приведет к беллетризации изложения в лучшем случае, а в худшем – к набору баек и анекдотов. Использование личностных смыслов в преподавании – не самоцель. Более полное и всестороннее раскрытие рассматриваемой темы, уяснение вновь вводимых понятий, установление внутренних и внешних взаимосвязей – вот только некоторые из задач, ради решения которых привлекаются конструкты, несущие личностные смыслы в изложение. И лучше их будет меньше некоторого допустимого уровня, который опытный преподаватель должен четко осознавать и чувствовать. Тогда каждый последующий факт применения конструкта на фоне ожидания аудиторией такого его использования будет иметь двойной положительный эффект.

**Список литературы**

1. Доугерти К. Введение в эконометрику: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 402 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и её преподавание. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 144 с.
3. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т. 2 Д – Коо. – М.: «Советская Энциклопедия», 1979, - С. 1010.
4. Медведев Ф.А. Развитие понятия интеграла. М., «Наука», 1974,- С. 7.
5. Москалёв Н.А. Математические артефакты для гуманитариев. // Логистическая интеграция российских регионов: Институциональные инновации: Сборник материалов международной научно-практической конференции. – Казань: Казанский филиал МИИТ, 2012. – 316 с.
6. Москалёв Н.А. Метафора в преподавании математики. // Актуальные проблемы социально-экологической и экономической безопасности Поволжского региона: Сборник по материалам IV Межвузовской научно- практической конференции. – Казань: Казанский филиал МИИТ, 2011. В 2-х частях. Часть 1. – 218 с.
7. Москалёв Н.А. Нарратив и постнарративная мобилизация. // Воспитание будущего учителя в процессе предметной подготовки. Материалы Всероссийского совещания-семинара «Воспитательный потенциал учебных дисциплин предметной подготовки в формировании личности будущего учителя». - Казань: Изд-во Казан. пед. ун-та, 2004. В 2-х частях. Часть 2. – 532 с.
8. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. – М.: Мир, 1983.
9. Розов Н.Х. Гуманитарная математика. Вестник Московского университета. Сер. 20. Педагогическое образование. 2004. №2, - С. 3.
10. Успехи математических наук, т. 34, №6, -С. 231.